Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

31. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8823 – 7127

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

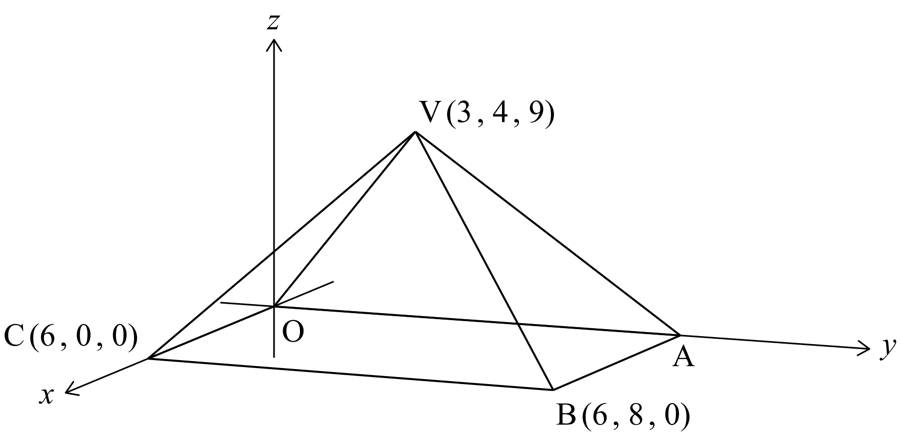
Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt eine Pyramide mit dem Scheitelpunkt V und der rechteckigen Grundfläche OABC.

Punkt B hat die Koordinaten $(6, 8, 0)$, Punkt C hat die Koordinaten $(6, 0, 0)$ und Punkt V hat die Koordinaten $(3, 4, 9)$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(a) Finden Sie BV. [2]

(b) Finden Sie das Maß von $\mathrm{B\hat{V}C}$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

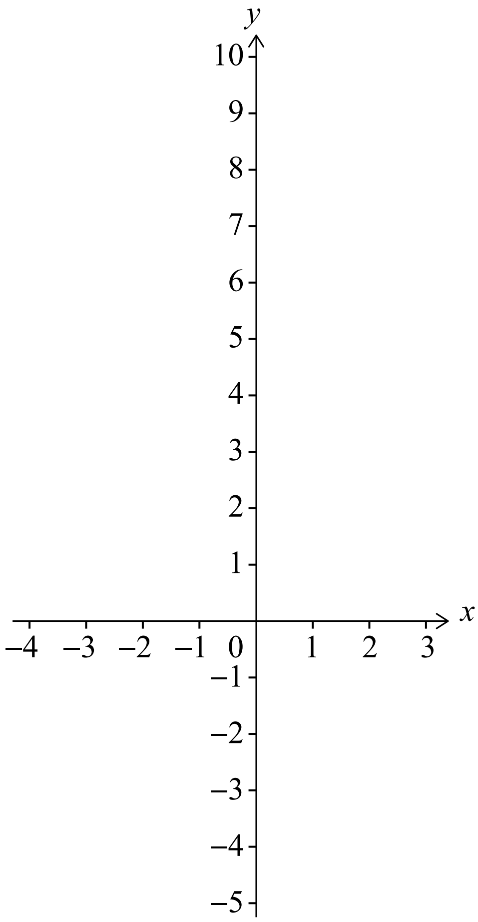
. . . .

. . . .

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^x - 3x - 4$.

(a) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem den Graphen von f für $-4 \leq x \leq 3$. [3]



Die Funktion g ist definiert durch $g(x) = e^{2x} - 6x - 7$.

(b) Der Graph von g ergibt sich aus dem Graphen von f durch eine horizontale Streckung mit dem Streckfaktor k, gefolgt von einer vertikalen Verschiebung um c Einheiten.

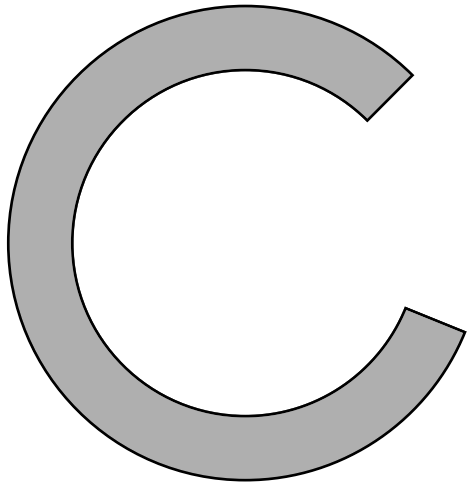
Finden Sie den Wert von k und den Wert von c. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

3. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Unternehmen entwirft ein neues Logo in Form des Buchstabens „C“.



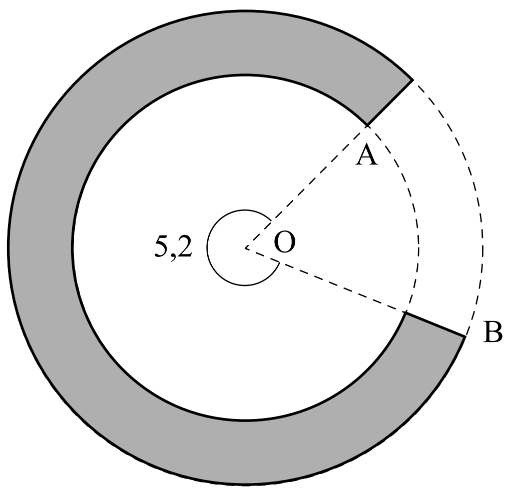
Der Buchstabe „C“ wird zwischen zwei Kreisen mit dem Mittelpunkt O gebildet.

Punkt A liegt auf der Kreislinie des inneren Kreises mit dem Radius $r\,\text{cm}$, mit $r < 10$.

Punkt B liegt auf der Kreislinie des äußeren Kreises mit dem Radius $10\,\text{cm}$.

Der überstumpfe Winkel $\text{A}\hat{\text{O}}\text{B}$ beträgt $5{,}2$ (im Bogenmaß). Der Buchstabe „C“ ist in der folgenden Abbildung durch den schattierten Bereich dargestellt.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 3)

(a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Buchstabens „C“ gegeben ist durch $260 - 2{,}6r^2$. [2]

Der Flächeninhalt des Buchstabens „C“ beträgt $64\,\text{cm}^2$.

(b) (i) Finden Sie den Wert von r.

(ii) Finden Sie den Umfang des Buchstabens „C“. [5]

4. [Maximale Punktzahl: 5]

Ein Teilchen bewegt sich entlang einer geraden Linie. Für seine Entfernung s (in Metern) von einem festen Punkt O zum Zeitpunkt t Sekunden gilt: $s(t) = 4{,}3\sin\left(\sqrt{3t+5}\right)$, mit $0 \le t \le 10$.

Das Teilchen kommt zum ersten Mal nach q Sekunden zur Ruhe.

(a) Finden Sie den Wert von q. [2]

(b) Finden Sie die Gesamtstrecke, die das Teilchen in den ersten q Sekunden zurücklegt. [3]

5. [Maximale Punktzahl: 5]

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X, mit a, $k \in \mathbb{R}^+$.

x	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	k	k^2	a	k^3

Es sei $\mathrm{E}(X) = 2{,}3$. Finden Sie den Wert von a.

6. [Maximale Punktzahl: 5]

Für die Zufallsvariable X gilt: $X \sim B(25\,, p)$ und $\mathrm{Var}(X) = 5{,}75$.

(a) Finden Sie die möglichen Werte von p. [3]

Für die Zufallsvariable Y gilt: $Y = 1 - 2X$.

(b) Finden Sie $\mathrm{Var}(Y)$. [2]

7. [Maximale Punktzahl: 6]

Ein Junioren-Baseballteam besteht aus sechs Jungen und drei Mädchen.

Die Teammitglieder müssen sich in einer Reihe aufstellen, um sich fotografieren zu lassen.

(a) Auf wie viele Arten können sich die Teammitglieder aufstellen, wenn

(i) es keine Einschränkungen gibt;

(ii) die Mädchen sich nebeneinander aufstellen müssen. [3]

(b) Fünf Mitglieder des Teams werden für ein Baseball-Sommercamp ausgewählt. Finden Sie die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten, bei denen mindestens zwei Mädchen enthalten sind. [3]

8. [Maximale Punktzahl: 9]

Drei Punkte sind gegeben durch $\mathrm{A}(0\,,p\,,2)$, $\mathrm{B}(1\,,1\,,1)$ und $\mathrm{C}(p\,,0\,,4)$, mit p als positiver Konstante.

(a) Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2-3p \\ -2-p \\ p^2-2p \end{pmatrix}$. [4]

(b) Finden Sie damit den kleinstmöglichen Wert von $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$. [3]

(c) Finden Sie damit den kleinstmöglichen Flächeninhalt des Dreiecks ABC. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Maximale Punktzahl: 9]

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4-y}{10}$, mit $y = 2$ für $x = 0$.

(a) Finden Sie mit Hilfe des Euler-Verfahrens mit der Schrittlänge $0{,}1$ einen Näherungswert für y für $x = 0{,}5$. Geben Sie Ihre Antwort auf vier signifikante Stellen genau an. [3]

(b) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung, dass $y = 4 - 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}$. [5]

(c) Ermitteln Sie den absoluten Fehler Ihrer Näherung im Teil (a). [1]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 16]

Ein Landwirt baut auf einem Feld Weizen an. Die Höhe H (in cm) jeder Weizenpflanze kann durch eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ modelliert werden.

Es gilt: $\mathrm{P}(H < 94{,}6) = 0{,}288$ und $\mathrm{P}(H > 98{,}1) = 0{,}434$.

(a) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe einer zufällig ausgewählten Pflanze zwischen $94{,}6\,\mathrm{cm}$ und $98{,}1\,\mathrm{cm}$ liegt. [2]

(b) Finden Sie die Werte von μ und σ. [5]

Der Landwirt misst 100 zufällig ausgewählte Pflanzen. Jede Pflanze mit einer Höhe von mehr als $98{,}1\,\mathrm{cm}$ gilt als erntereif. Die Höhen der Pflanzen sind unabhängig voneinander.

(c) (i) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 34 Pflanzen erntereif sind.

(ii) Finden Sie unter der Annahme, dass weniger als 49 Pflanzen erntereif sind, die Wahrscheinlichkeit, dass genau 34 Pflanzen erntereif sind. [6]

Auf einem anderen Feld baut der Landwirt die gleiche Weizensorte an, verwendet aber einen anderen Dünger. Die Höhe F (in cm) dieser Pflanzen ist normalverteilt mit dem Mittelwert $98{,}6$ und der Standardabweichung d. Der Landwirt stellt den Quartilsabstand $4{,}82\,\mathrm{cm}$ fest.

(d) Finden Sie den Wert von d. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 19]

Betrachten Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{x^2-14x+24}{2x+6}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -3$.

(a) Geben Sie die Gleichung der vertikalen Asymptoten an den Graphen von f an. [1]

(b) Finden Sie die Koordinaten der Punkte, an denen der Graph von f die x-Achse schneidet. [2]

Der Graph von f besitzt ebenfalls eine schräge Asymptote der Form $y = ax + b$, mit a, $b \in \mathbb{Q}$.

(c) Finden Sie den Wert von a und den Wert von b. [4]

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f für $-50 \leq x \leq 50$ mit deutlich erkennbaren Asymptoten und allen Achsenschnittpunkten. [4]

(e) Finden Sie den Wertebereich von f. [4]

(f) Lösen Sie die Ungleichung $f(x) > x$. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 18]

Die Gerade L ist gegeben durch die Vektorgleichung $\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

Die Gerade M ist gegeben durch die Vektorgleichung $\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden L und M sich im Punkt A schneiden, und finden Sie den Ortsvektor von A. [5]

(b) Validieren Sie, dass die Geraden L und M beide auf der Ebene Π mit der Gleichung $\boldsymbol{r} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 7$ liegen. [3]

Punkt B besitzt den Ortsvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eine zu Π senkrechte Gerade durch den Punkt B schneidet Π im Punkt C.

(c) (i) Finden Sie den Ortsvektor von C.

(ii) Finden Sie damit $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$. [7]

(d) Finden Sie den Spiegelpunkt von B zur Ebene Π. [3]